

ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

Мета: Навчитись застосовувати вбудовані функції програми MS Excel для розв'язку задач теорії ймовірності, які містять повторні незалежні випробування.

Змістовність роботи: Формула Бернуллі. Застосування граничних випадків формули Бернуллі: локальна та інтегральна теореми Лапласа, формула Пуассона. Використання функцій MS Excel для розрахунків.

2.1. Теоретичні відомості

Нехай проводиться n випробувань, у кожному з яких може з'явитися подія A . Якщо ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від того, з'явилась або не з'явилась ця подія в інших випробуваннях, то такі випробування називаються незалежними щодо події A .

Нехай проводиться серія з n незалежних випробувань, у кожному з яких може з'явитися подія A з ймовірністю $P(A) = p$. Ймовірність того, що подія A не наступить для кожного випробування дорівнює $P(\bar{A}) = 1 - p = q$.

Ймовірність $P_n(k)$ того, що при n незалежних випробуваннях подія A з'явиться рівно k раз, обчислюється за формулою, яку називають **формулою Бернуллі**:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot p^{n-k} \quad \text{або} \quad P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k \cdot p^{n-k}. \quad (2.1)$$

Для спрощення аналітичних розрахунків за формулою Бернуллі використовують вбудовану функцію «**БИНОМРАСП (k;n;p;0)**», де k -

кількість появ події, n – число незалежних випробувань, p – ймовірність появи події, «0» - вказує на те, що визначається ймовірність появи події рівно k разів. Якщо останній аргумент дорівнює «1», то функція повертає ймовірність того, що в n випробуваннях подія наступить не менше ніж k разів.

Локальна теорема Лапласа. Ймовірність $P_n(k)$ того, що у великій кількості n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0 < p < 1$), подія наступить рівно k разів (у будь-якій послідовності), обчислюється за формулою:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f(x), \quad (2.2)$$

де $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ - функція Лапласа, а $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Для спрощення та автоматизації аналітичних розрахунків за локальною теоремою Лапласа використовують наступні вбудовані функції:

$f(x) = \text{НОРМРАСП}(x; 0; 1; 0)$ та $x = \text{НОРМАЛИЗАЦИЯ}(k; \lambda; \sigma)$, де $\lambda = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$, 0 – середнє арифметичне розподілення, 1 – стандартне відхилення, 0 – тип функції (у даному випадку вагова).

Для знаходження значення x використовують функцію «НОРМ.ОБР(вероятностъ;среднее;стандартное_откл)».

Інтегральна теорема Лапласа. Ймовірність $P_n(k_1, k_2)$ того, що у великій кількості n незалежних випробуваннях, у кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0 < p < 1$), подія наступить не менше k_1 раз і не більше k_2 , обчислюється за формулою (2.3):

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (2.3)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ - інтегральна функція Лапласа, а

$$x_1, x_2 = \frac{k_1, k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Для спрощення та автоматизації аналітичних розрахунків за інтегральною теоремою Лапласа використовують наступні вбудовані функції: $\Phi(x) = \text{НОРМ.СТ.РАСП}(x; 1)$ та $x = \text{НОРМАЛИЗАЦИЯ}(k; \lambda; \sigma)$.

Для знаходження значення x використовують функцію «НОРМ.СТ.ОБР((1+вероятность)/2)».

У випадку малої ймовірності $p \rightarrow 0$ появи події A рівно k разів в n незалежних дослідах при $np < 10$, користуються законом Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad (2.4)$$

де $\lambda = np$.

Для спрощення та автоматизації аналітичних розрахунків за законом Пуассона використовують вбудовану функцію «ПУАССОН ($x; \lambda; 0$)» для таких параметрів: x – кількість подій, $\lambda = n \cdot p$ – середнє значення; 0 – вказує на тип функції (в даному випадку вагова).

Імовірність того, що **відхилення відносної частоти** m/n від **постійної ймовірності** p по абсолютній величині не перевищує заданого числа ($\varepsilon > 0$), тобто імовірність здійснення нерівності $|m/n - p| \leq \varepsilon$, наближено дорівнює значенню подвоєної функції Лапласа:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right\} = 2\Phi(x) \text{ при } x = \varepsilon \sqrt{n/(pq)}. \quad (2.5)$$

Кількість дослідів n , які потрібно провести для того, щоб з **ймовірністю, не менше** $P1$, можна стверджувати, що дана подія відбудеться

хоча б один раз, знаходиться за формулою:

$$n \geq \log(1 - P_1) / \log(1 - p). \quad (2.6)$$

Число k_0 появи події A в серії з n дослідів, ймовірність якого найбільша, називається **найбільш ймовірним числом** появи події A в n дослідах. Дане число знаходять з виразу:

$$np - q \leq k_0 < np + p. \quad (2.7)$$

В таблиці 2.1 наведено основні формули, умови їх використання для розрахунку ймовірності у випробуваннях з повтореннями, а також відповідні їм функції в MS Excel.

Таблиця 2.1 Основні формули для розрахунку ймовірності у випробуваннях з повтореннями

Назва	Формула	Функція в MS Excel	Умови
Формула Бернуллі	$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot p^{n-k}$	БИНОМРАСП(k;n;p;0)	
Локальна теорема Лапласа	$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} f(x),$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2},$ $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$	$f(x) = \text{НОРМРАСП}(x; 0; 1; 0)$ $x = \text{НОРМАЛИЗАЦИЯ}(k; \lambda; \sigma)$ де $\lambda = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$	$n \rightarrow \infty$
Інтегральна теорема Лапласа	$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$ $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$ $x_1, x_2 = \frac{k_1, k_2 - np}{\sqrt{npq}}$	$\Phi(x) = \text{НОРМ.СТ.РАСП}(x; 1)$	$n \rightarrow \infty$
Закон Пуассона	$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda},$ $\lambda = p \cdot n$	ПУАССОН (x; λ; 0)	$p \rightarrow 0$

2.1. Завдання до виконання роботи

Створити файл MS Excel, який буде мати наступну назву:
КП2_Прізвище студента_№варіанту.

Завдання 2.1. Дослідити зміни значень ймовірностей, отриманих за допомогою формули Бернуллі та її граничних відхилень. Побудувати порівняльні графіки.

Визначити:

- а) ймовірність на заданому проміжку $k_1 < k < k_2$;
- б) ймовірність того, що відхилення відносної частоти m/n від постійної ймовірності p не перевищує ε ;
- в) кількість дослідів n , які потрібно провести для того, щоб з ймовірністю, не менше P_1 , можна стверджувати, що дана подія відбудеться хоча б один раз;
- г) найбільш ймовірне число k_0 появи події A в n дослідах

Вхідні дані:

- $n=20$;
- $k=0...15$ з інтервалом 1, $k_1=1+\text{№В}$, $k_2=5+\text{№В}$ для перших 10 по списку,
- $k=0...10$, $k_1=\text{№В} - 10$, $k_2=\text{№В} - 4$ з інтервалом 1 для всіх інших;
- p, ε, P_1 – беруться з таблиці 2.3 відповідно до номеру №В .

Приклад оформлення наведено в додатку 2.1.

Таблиця 2.2 Вхідні дані до завдання 2.1.

№В	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8	0,9
ε	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,01	0,02
P_1	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,3	0,7
№В	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
ε	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,02	0,03
P_1	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,85	0,8
p	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5	0,6	0,7	0,8	0,6	0,3

Порядок виконання Завдання 2.1.

1. У нижньому лівому куті перейменувати «Лист 1» на «Завдання 2.1».
2. Записати вхідні дані як показано в додатку 2.1.
3. Створити таблицю в MS Excel наступного вигляду.

Таблиця 2.3.

k	Бернуллі	Лапласа	Пуассона	x	$f(x)$	$\Phi(x)$

4. Задати значення k з інтервалом 1.

5. У відповідній комірці ввести формулу Бернуллі, яка визначається через вбудовану функцію «БИНОМРАСП($k;n;p;0$)». Присвоїти коміркам відповідні значення: «число_успехов» – k_i , «число_испытаний» – n , «вероятность_успеха» – p , «интегральная» – 0.

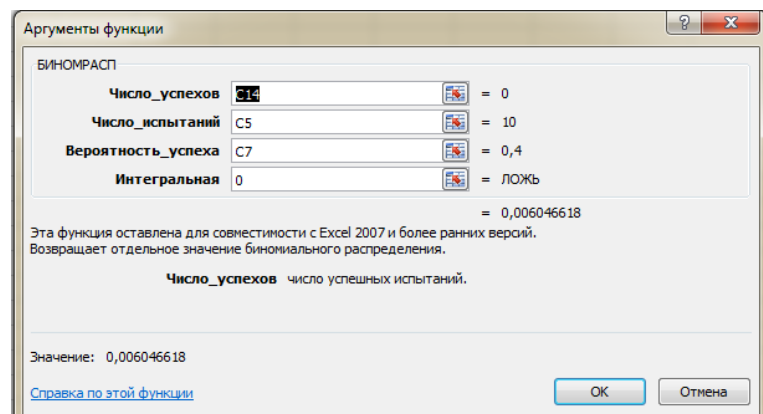


Рис. 2.1 Вікно функції «БИНОМРАСП»

6. Закріпити C\$7 та C\$5, щоб не відбувалось зміщення по рядках. Скопіювати отримане значення та вставити для наступних значень k .
7. Розрахувати значення $\lambda = n \cdot p$, що в MS Excel задається як «=n*p», та $\sigma = (n \cdot p \cdot q)^{0.5}$ і, відповідно в MS Excel, – «=КОРЕНЬ(n*p*(1-p))».
8. Для користування формулою Лапласа потрібно визначити x та $f(x)$:

8.1. Визначити x за допомогою вбудованої функції «НОРМАЛИЗАЦИЯ($k;\lambda;\sigma$)». Присвоїти коміркам відповідні значення: «X» – k_i , «среднее» – λ , «стандартное_откл» – σ .

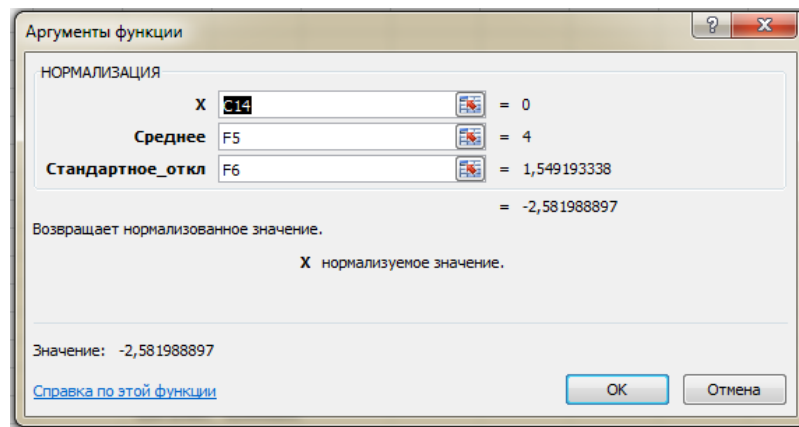


Рис. 2.2 Вікно функції «НОРМАЛИЗАЦИЯ»

8.2. Визначити $f(x)$ за допомогою вбудованої функції «НОРМРАСП ($x;0;1;0$)». Присвоїти коміркам відповідні значення: «X» – значення x , отримане у п.8.1; «среднее» – 0, «стандартное_откл» – 1, «интегральная» – 0.

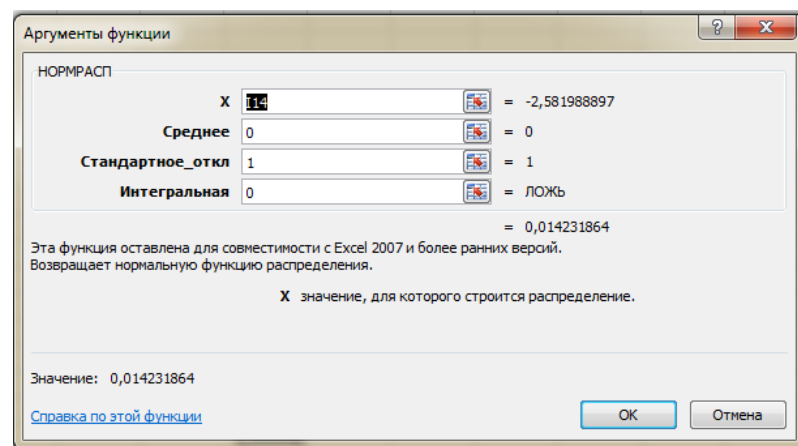


Рис. 2.3 Вікно функції «НОРМРАСП»

9. У відповідній комірці ввести формулу Лапласа, яка визначається відношення $f(x)$ до σ , і відповідно в MS Excel задається як: $f(x)/\sigma$.
10. Скопіювати отримане значення та вставити для наступних значень k .
11. У відповідній комірці ввести формулу Пуассона, яка визначається через вбудовану функцію «ПУАССОН ($x; \lambda; 0$)». Присвоїти коміркам відповідні значення: «x» – k_i , «среднее» – λ , «интегральная» – 0.

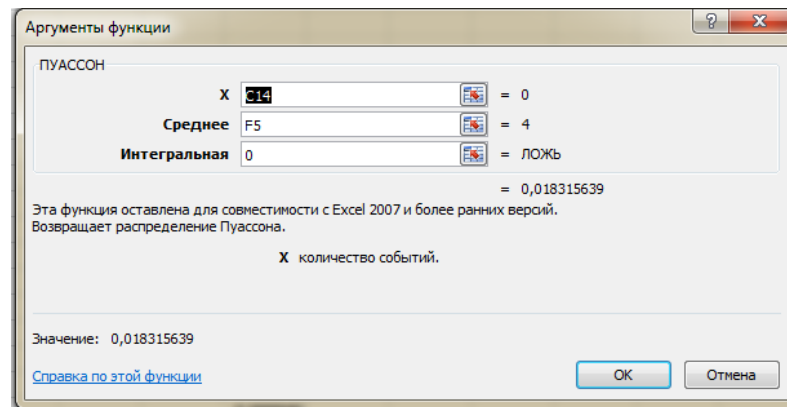


Рис.2.4 Вікно функції «ПУАССОН»

12. Знайти сумарні значення, виділивши необхідні колонки та використавши значок «сума» головного меню (рис.2.5).

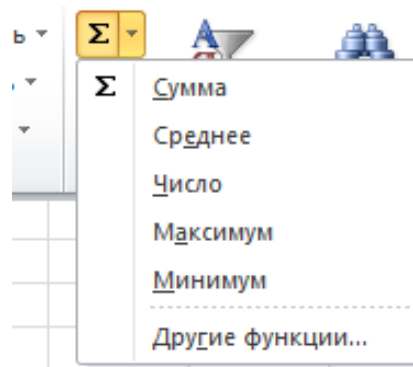


Рис. 2.5 Вікно вибору функції

13. Визначити $\Phi(x)$ за допомогою вбудованої функції «НОРМ.СТ.РАСП ($x;1$) - 0,5». Присвоїти коміркам відповідні значення: «X» – значення x , отримане в п.8.1; «интегральная» - 1.

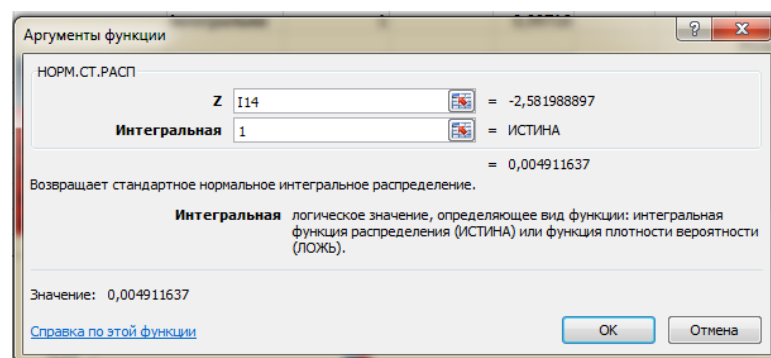


Рис. 2.6 Вікно функції «НОРМ.СТ.РАСП»

14. Визначити ймовірність на заданому проміжку $k_1 < k < k_2$ за формулою (2.3):

14.1. Обрати з загального числа значення $\Phi(x_1)$ та $\Phi(x_2)$, що відповідають k_1 та k_2 .

14.2. Знайти різницю $\Phi(x_2) - \Phi(x_1)$.

15. Визначити ймовірність того, що відхилення відносної частоти m/n від постійної ймовірності p не перевищує ε . Задати формулу (2.5) в комірці K29, що в MS Excel задається як «=2*(НОРМ.СТ.РАСП(C12*(КОРЕНЬ(C5/(C7*C8)));1)-0,5)», де C12 – значення ε , C5 – значення загальної кількості дослідів, C7 – значення ймовірності, C8 – значення, протилежне до ймовірності.

16. Визначити кількість дослідів n , які потрібно провести для того, щоб з ймовірністю, не менше P_1 , можна стверджувати, що дана подія відбудеться хоча б один раз за формулою (2.6). Комірці K30 присвоїти значення «=LOG(1-C11)/LOG(1-C7)», де C7 – значення ймовірності, C11 – значення P_1 .

17. Округлити отримане значення в п.16 до більшого за допомогою вбудованої функції «ОКРВВЕРХ.ТОЧН(K30)» в комірці K31.

18. Визначити найбільш ймовірне число k_0 появи події A в n дослідах за формулою (2.7). Присвоїти комірці J32 значення «=C5*C7-C8», а L32 – «=C5*C7-C7».

19. Округлити отримане значення в п.18 до більшого за допомогою вбудованої функції «=ОКРВВЕРХ.ТОЧН(J32)».

20. Побудувати графік залежності значень k від трьох законів. Підписати осі та легенди (див. комп'ютерний практикум № 1, завд.1, п.11).

21. Зробити перевірку: а) $n \{1 \dots k=n\}$, б) $p \rightarrow 0; n \rightarrow \infty$; в) $n \rightarrow \infty$;

Завдання 2.2. Розв'язати та оформити в MS Excel через вбудовані функції наступні задачі.

У нижньому лівому куті перейменувати «Лист 2» на «Завдання 2.2».

Задача 2.2.1. У кожному з n спрацювань системи аварійної сигналізації подія A , тобто перевищення тиску, відбувається з постійною ймовірністю p .

а) обчислити всі ймовірності $P_n(k)$, $k=0,1,2,\dots,n$, де k – кількість подій A .

б) побудувати діаграму ймовірностей.

в) визначити найймовірнішу кількість порушень технологічного процесу через перевищення тиску у реакторі k_0 та розрахувати ймовірність її появи.

Значення n та p беруть з таблиці 2.4 згідно №В.

Таблиця 2.4 Вхідні дані до завдання 2.2.1

№В	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	8	10	12	14	16	8	10	12	14	16	16	14
p	0.4	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.4	0.3	0.04
№В	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
n	8	10	12	14	16	8	10	12	14	16	8	10
p	0.5	0.6	0.4	0.5	0.6	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.6	0.8

Задача 2.2.2. Ймовірність появи події A при кожному випробуванні дорівнює p . Здійснено n незалежних випробувань.

Визначити ймовірність того, що:

а) подія A наступить рівно k разів (**№В**);

б) подія A наступить від k_1 до k_2 разів включно.

Значення n , p , k , k_1 та k_2 беруть з таблиці 2.5 згідно №В.

Таблиця 2.5 Вхідні дані до завдання 2.2.2

№В	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	400	300
p	0,4	0,4	0,4	0,6	0,6	0,6	0,4	0,4	0,4	0,6	0,7	0,6
k_1	70	82	75	200	205	209	190	195	200	355	205	75
k_2	78	88	100	222	226	228	205	210	215	392	226	100
№В	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
n	200	250	300	350	400	450	500	550	600	650	200	250
p	0,6	0,6	0,4	0,4	0,4	0,6	0,6	0,6	0,4	0,4	0,5	0,9
k_1	360	370	260	265	270	485	490	498	330	340	360	370
k_2	395	400	305	300	285	520	535	540	375	380	395	400

Задача 2.2.3. Помилкове спрацювання системи аварійної сигналізації відбувається з ймовірністю p . Знайти ймовірність того, що серед усіх n спрацювань відбуваються:

- а) точно k -те помилкове спрацювання (**№В**);
- б) менше $k1$ -х помилкових спрацювань*;
- в) більше $k1-1$ помилкових спрацювань;
- г) ймовірність відхилення відносної частоти m/n від постійної ймовірності p не перевищує ε ;
- д) кількість дослідів n , які потрібно провести для того, щоб з ймовірністю, не менше $P1$, можна стверджувати, що дана подія відбудеться хоча б один раз

Значення n , p , ε , $P1$, $k1$ та $k2$ беруть з таблиці 2.6 згідно №В.

Таблиця 2.6 Вхідні дані до завдання 2.2.3

№В	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	250	250	250	250	300	300	300	300	400	400	250	550
p	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,04	0,03
$k1$	8	9	10	11	15	17	20	22	20	22	5	4
ε	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,02	0,02
$P1$	0,9	0,95	0,8	0,85	0,9	0,95	0,8	0,85	0,9	0,95	0,7	0,9
№В	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
n	400	400	450	450	450	450	500	500	500	500	450	150
p	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,03	0,03
$k1$	23	24	30	32	33	20	25	22	20	24	8	8
ε	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,02	0,02	0,02	0,04	0,04	0,02	0,02
$P1$	0,8	0,85	0,9	0,95	0,8	0,85	0,9	0,95	0,8	0,85	0,9	0,9

УВАГА! *При розрахунку «не більше» користуються інтегральною функцією, тобто в функції «ПУАССОН (x ; λ ; 1)» присвоїти комірці «інтегральная» - 1. При цьому «більше» = 1 – «не більше».

2.3. Вимоги до оформлення звіту

1. Звіт має бути представлений в електронному вигляді не пізніше ніж до наступного комп'ютерного практикуму.
2. Назва електронного файлу **КП2_Прізвище студента_№варіанту**.
3. Файл повинен містити наступні елементи:

Дано:

вхідні дані – позначити жовтим;

Знайти:

невідоме з вказаною умовою – позначити червоним;

Розв’язок:

Зробити опис кожної дії – позначити зеленим.

Перевірка: - позначити синім.

Відповідь: - позначено червоним.

4. При заміні тільки вхідних даних (виділено жовтим) повинен змінюватись вихідний результат.

3. Оформлення завдань згідно Додатку 2.1.

5. Висновки по роботі.

Якщо звіт не відповідає вимогам, то робота не зараховується!

2.4. Контрольні запитання

1. Які закони використовуються для оцінки ймовірності про повторенні випробувань?
2. Опишіть закон Бернуллі та його граничні теореми.
3. Якими функціями MS Excel задаються основні закони?
4. Як визначається число найімовірнішої появи події?
5. Як визначається ймовірність відхилення відносної частоти m/n від постійної ймовірності p , що не перевищує ε ;
6. Як визначається кількість дослідів n , які потрібно провести для того, щоб з ймовірністю, не менше P_1 , можна стверджувати, що дана подія відбудеться хоча б один раз?