Комп'ютерний практикум № 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ. ПЕРЕСТАНОВКА. РОЗМІЩЕННЯ. ПОЄДНАННЯ

Мета. Навчитись розв'язувати задачі теорії ймовірності з елементами комбінаторики із застосуванням програми MS Excel.

Змістовність роботи: Факторіал та його властивості; визначення і формули для розрахунку варіантів перестановок, розміщень з повтореннями і без повторень, поєднань; використання функцій MS Excel для розрахунків комбінацій.

1.1. Теоретичні відомості

Факторіал будь якого невід'ємного числа n це добуток всіх послідовних натуральних чисел від 1 до числа n. Факторіал числа n позначають через **n!**. Тобто можна записати що:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)... \tag{1.1}$$

З формули (1.1) випливає, що факторіали для n=0 та n=1 дорівнюють 0!=1 та 1!=1.

При збільшенні числа n (після n=14) значення факторіалу починає стрімко зростати (рис.1.1) і тому розрахунок стає занадто складним. У цьому випадку користуються **наближенням Муавра-Стирлінга**.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{1.2}$$

n	n!
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1,30767E+12

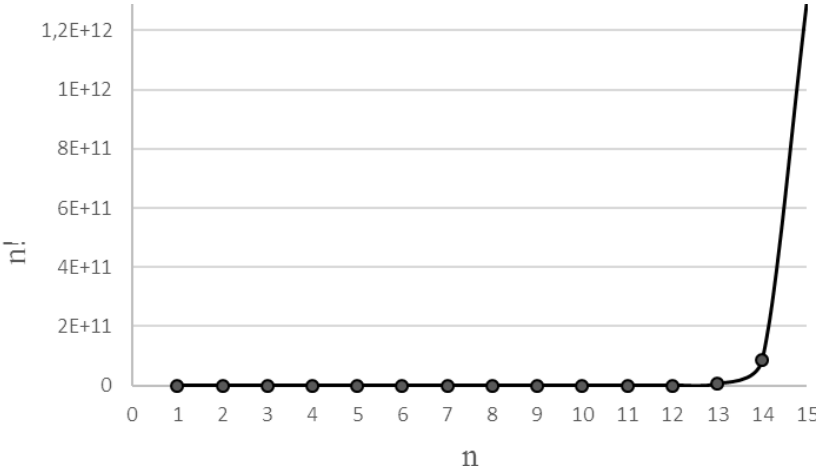

Рис. 1.1 Значення факторіалу для різних значень *n*

Для розрахунку факторіалу в MS Excel використовують вбудовану функцію «**ФАКТР(n)»**.

Перестановкою (без повторень) є розміщення заданої кількості різних предметів у визначеному порядку, при цьому предмети не повторюються.

Нехай дано *n* різних предметів, тоді кількість можливих перестановок P_n визначається за формулою 1.3.

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1. \qquad (1.3)$$

Перестановкою (**з повтореннями**) є розміщення заданої кількості різних предметів у визначеному порядку, предмети при цьому можуть повторюватись.

Нехай *n* – загальна кількість предметів, з яких є *i* повторень: n_1, n_2,..,n_i. Тоді кількість можливих перестановок $P_{n(повтор)}$ визначається за формулою:

$$P_{n(повтор)} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_i!}. \qquad (1.4)$$

Розміщенням (без повторень) *n* предметів по *m* місцям (розміщення з *n* по *m*) називають комбінацію з *m* різних предметів, які містять *n* предметів. **Порядок** послідовності в даному випадку **важливий**.

Кількість можливих перестановок з *n* по *m* позначають як A_n^m та розраховують за формулою розміщень:

$$A_n^m = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (1.5)$$

Для розрахунку розміщень без повторень в MS Excel використовують вбудовану функцію «**ПЕРЕСТ(n;m)»**.

Розміщенням (з повтореннями) *n* предметів по *m* місцям (розміщення з *n* по *m* з повтореннями) називають комбінація з *m* предметів, які містять *n* предметів. Тобто є *n* типів предметів та *m* місць, на кожне з яких може стати предмет будь якого типу. Будь який тип предмету може зустрітись в отриманій комбінації будь-яку кількість разів, але **порядок** послідовності в даному випадку **важливий**.

Кількість можливих розміщень з повтореннями з *n* по *m* позначають як $A^m_{n(\,повтор\,)}$ та розраховують за формулою розміщень:

$$A^m_{n(\,повтор\,)} = n^m. \quad (1.6)$$

Для розрахунку розміщень з повтореннями в MS Excel використовують наступний вираз «=**n^m**».

Поєднаннями (без повторень) з *n* предметів по *m* називають комбінацію вибору *m* предметів з *n* без врахування порядку вибору. **Порядок** послідовності в даному випадку **не важливий**.

Кількість можливих поєднань з n по m позначають як C_n^m та розраховують за формулою поєднань:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (1.7)$$

Для розрахунку розміщень без повторень в MS Excel використовують вбудовану функцію «**ЧИСЛОКОМБ(n;m)».**

Поєднаннями (з повтореннями) з n предметів по m називають комбінація вибору m предметів з n без врахування порядку вибору. **Порядок** послідовності в даному випадку **не важливий**.

Тобто є n типів предметів з яких необхідно вибрати m. **Порядок** послідовності в даному випадку **не важливий**.

Кількість можливих поєднань з n по m позначають як $C^m_{n(\,повт\,)} = C^m_{n+m-1}$ та розраховують за формулою поєднань:

$$C^m_{n+m-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-m+m-1)!} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \quad (1.8)$$

В таблиці 1.1. Наведено основні формули комбінаторики та відповідні функції в MS Excel.

Таблиця 1.1 Формули комбінаторики

Назва	**Формула**	**Функція в MS Excel**
Перестановки	$P_n = n!$	ФАКТР(n).
Розміщення (без повторень)	$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$	ПЕРЕСТ(n;m)
Розміщення (з повтореннями)	$A^m_{n(\,повтор\,)} = n^m$	n^m
Поєднання (без повторень)	$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$	ЧИСЛКОМБ(n;m)

Правило суми. Якщо деякий об'єкт A може бути вибраний із сукупності обєктів m способами, а другий об'єкт B може бути вибраний n способами, то вибрати **або** A, **або** B можна $m+n$ способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт A може бути вибраний із сукупності об'єктів m способами і після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати n способами, то пара об'єктів (A, B), тобто A **і** B, у вказаному порядку може бути вибрана $n \cdot m$ способами.

1.2. Завдання для виконання

Створити файл MS Excel, який буде мати наступну назву: **КП1_Прізвище студента_№варіанту**.

Завдання 1.1. Визначити відхилення значення факторіалу, використовуючи функцію ФАКТР (n) від значення, розрахованого за формулою Муавра-Стирлінга (1.1).

Створити таблицю в MS Excel наступного вигляду

Таблиця 1.2 Оформлення результатів завдання 1.1

n	n!	Формула Муавра-Стирлінга	Відхилення

Заповнити її для n=i…k, з інтервалом a. Значення i вибираються з таблиці 1.3, k=20+i+№В, a – для непарного №В – 1, для парного №В – 2.

Таблиця 1.3 Вхідні дані до завдання 1.1 відповідно до номеру варіанта

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
i	1	4	6	8	10	1	4	6	8	10	2	5
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
i	1	4	6	8	10	1	4	6	8	10	3	7

Побудувати порівняльні графіки залежності кількості елементів до точного та наближеного значення факторіалу n!.

Приклад оформлення наведено в додатку 1.1.

Порядок виконання Завдання 1.1.

1. У нижньому лівому куті перейменувати «Лист 1» на «Завдання 1.1».
2. Записати вхідні дані як показано в додатку 1.1.
3. Створити в MS Excel таблицю 1.2.
4. Під колонкою *n* комірці присвоїти значення *i*, для цього в робочому рядку набрати «=» та натиснути на комірку зі значенням *i* (рис.1.2). (У даному випадку значення *i* знаходиться в комірці D5).
5. Для створення значень від *i-1* до *k* з інтервалом *a* виконати наступні дії: Перейти у відповідну комірку та задати значення n_1+a наступною формулою «=ЕСЛИ(C13=$D$6;"stop";C13+$D$7)». Де символ $ фіксує значення, а оператор «ЕСЛИ» зупиняє значення, що більші за k. Отримане значення (C14 на рис.1.2) скопіювати і вставити в задану кількість комірок.

	C	D	E	F	
4	Дано:				
5	i=	1			
6	k=	15			
7	a=	1			
8					
9					
10	**Роз'вязок:**				
11					
12	n	n!	Формула МС	Відхилення	
13	1				
14	2				
15	3				

Рис. 1.2 Фрагмент оформлення вхідних даних до Завдання 1.1

6. Під колонкою n! комірці (D13) присвоїти функцію ФАКТР(n). Для цього виконати наступні дії. Натиснути f_x, вибрати функцію ФАКТР і в наступному вікні комірки «число» присвоїти значення n_1 (C13 на рис.1.2) (рис.1.3).

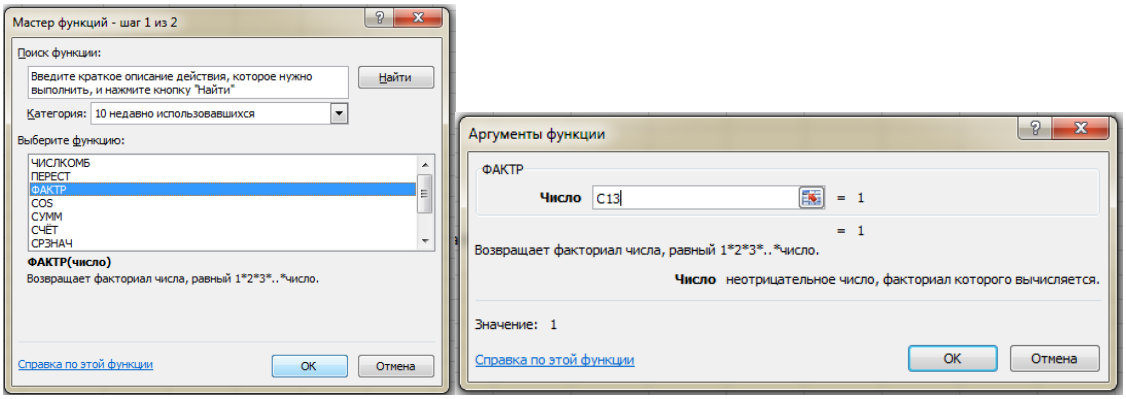

Рис. 1.3 Вибір функції «ФАКТР»

7. Скопіювати отримане значення та вставити для наступних значень *n*.

8. Під колонкою Формула МС комірці (E13) присвоїти формулу (1.2), яка в середовищі MS Excel матиме наступний вигляд: «=((2*3,14*C13)^(1/2))*(C13/2,7)^C13».

9. Скопіювати отримане значення та вставити для наступних значень *n*.

10. Знайти відхилення, для цього від колонки «n!» відняти колонку «Формула МС».

11. Побудувати графік залежності кількості елементів від точного та наближеного значення факторіалу n!. Підписати осі: «Макет» → «Название осей», назва легенди: «Конструктор» → «выбрать данные» → «изменить».

12. Зробити висновок.

Завдання 1.2.

Визначити кількість можливих комбінацій елементів *n* в залежності від використаного закону комбінаторики згідно таблиці 1.1.

Порядок виконання Завдання 1.2.

1. У нижньому лівому куті перейменувати «Лист 2» на «Завдання 1.2».

2. Задати вхідні дані: загальну кількість об’єктів *n* та сприятливих виходів *m* відповідно до номеру варіанта (таблиця 1.4).

Таблиця 1.4 Вхідні дані до завдання 1.2
відповідно до номеру варіанту

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
n	8	10	12	16	18	20	24	26	28	30	35	38
m	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	8	10
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
n	30	28	26	24	20	18	16	12	10	8	7	14
m	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6	4	8

3. Для розрахунку операцій комбінацій створити таблицю 1.5

Таблиця 1.5 Оформлення результатів завдання 1.2

Операція	Кількість
Перестановки **n** об'єктів без повторень	
Перестановки **n** об'єктів з повтореннями	
Розміщення по **m** елементів з **n** без повторень	
Розміщення по **m** елементів з **n** з повтореннями	
Поєднання **m** елементів з **n** без повторень	
Поєднання **m** елементів з **n** з повтореннями	

4. Вибрати комірку для розрахунку кількості перестановок *n* об’єктів без повторень. Натиснути f_x, вибрати функцію «ФАКТР» і в наступному вікні комірки «число» присвоїти значення *n* (у даному випадку С6, див додаток 2).

5. Обрати комірку для розрахунку кількості перестановок об’єктів з повтореннями за формулою (1.4). За значення n_1 взяти значення *m*. Оскільки існує обов’язкова умова $n>m$, при якій розрахунок можливий, скористаємось оператором «ЕСЛИ». Для цього з можливих f_x виберемо «ЕСЛИ» (рис.1.4) та заповниим наступні комірки:

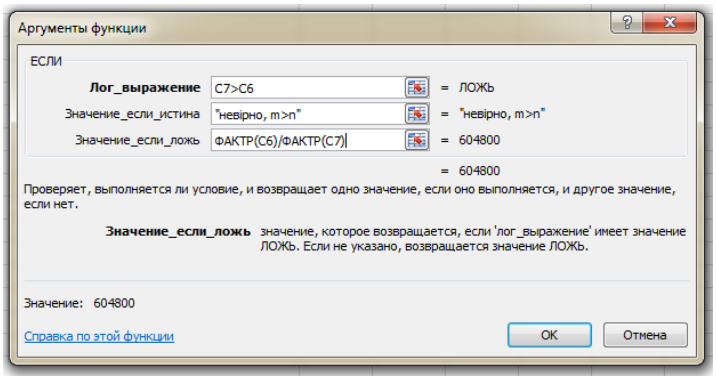

Рис. 1.4 Вікно оператора «ЕСЛИ»

5.1. У комірці «Лог_выражение» ввести умову, у даному випадку $n>m$.

5.2. У комірці «Значение_если_истина» ввести результат: у даному випадку $m>n$, тому згідно п.5. «невірно».

5.2. У комірці «Значение_если_ложь» ввести результат: у даному випадку $n>m$, тому згідно п.5 це значення визначається за формулою 1.4, яка в MS Excel задається як:

«Ф=АКТР(n)/((ФАКТР(n_1)·ФАКТР(n_2)·…·ФАКТР(n_n))».

6. Обрати комірку для розрахунку кількості розміщень по m об'єктів з n без повторень за формулою (1.5). Оскільки існує обов'язкова умова $n>m$, при якій розрахунок можливий, скористаємось оператором «ЕСЛИ». Для цього повторимо операції 5.1-5.2, з урахуванням того, що формула для визначення кількості перестановок без повторень в MS Excel задається як «ПЕРЕСТ(n,m)».

7. У сусідній комірці отримати кількість розміщень по m об'єктів з n без повторень за допомогою вбудованої функції «ПЕРЕСТ(n,m)» (рис.1.5). Натиснути f_x, вибрати функцію «ПЕРЕСТ» і в наступному вікні комірки «число» присвоїти значення n (в даному випадку С6), «Число_выбраных» - значення m (в даному випадку С7).

8. Вибрати комірку для розрахунку кількості розміщень по m об'єктів з n з повтореннями за формулою (1.6). У даному випадку умова $n>m$ неважлива. Тому задаємо формулу (1.6). як n^m («^» - задається як «shift6»).

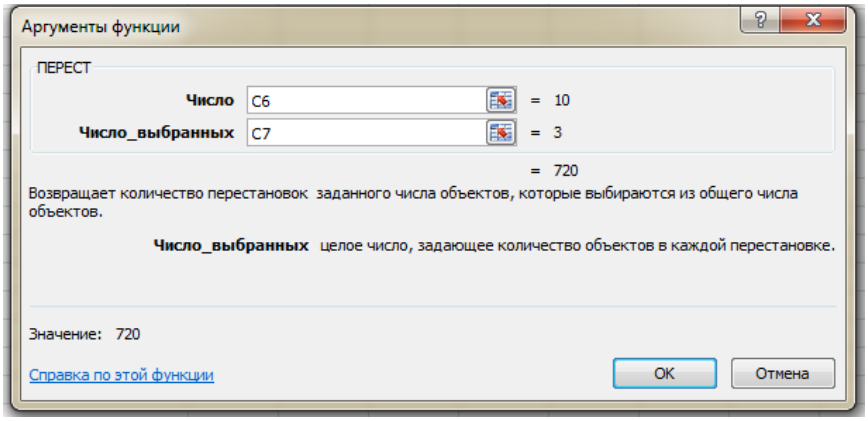

Рис. 1.5 Вікно функції «ПЕРЕСТ»

9. Вибрати комірку для розрахунку кількості перестановок *m* об'єктів з *n* без повторень за формулою (1.7). Оскільки існує обов'язкова умова *n*>*m*, при якій розрахунок можливий, то скористаємось оператором «ЕСЛИ». Для цього повторити пункти 5.1-5.2, з урахуванням того, що формула для визначення кількості перестановок без повторень в MS Excel задається як «ЧИСКОМБ(n, m)».

10. У сусідній комірці отримати кількість перестановок *m* об'єктів з *n* без повторень за допомогою вбудованої функції «ЧИСЛКОМБ» (рис.1.6). Натиснути f_x, вибрати функцію «ЧИСЛКОМБ» і в наступному вікні комірки «число» присвоїти значення *n* (в даному випадку С6), «Число_выбраных» - значення *m* (в даному випадку С7).

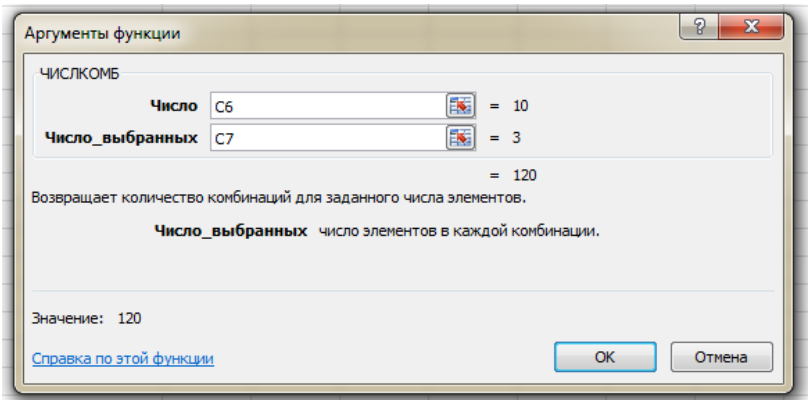

Рис. 1.6 Вікно функції «ЧИСЛОКОМБ»

11. Вибрати комірку для розрахунку кількості поєднань *m* об'єктів з *n* з повтореннями за формулою (1.8). У даному випадку умова *n*>*m* неважлива. Тому задамо формулу (1.8). як «=ФАКТР(n+m-1)/ ФАКТР(m)·ФАКТР(n-1)».

12. Зробити перевірку – змінити значення вхідних даних, що виконувалась умова *m*>*n*.

13. Приклад оформлення завдання показано в додатку 1.2.

Завдання 1.3. Розв'язати та оформити в MS Excel через вбудовані функції наступні задачі. Приклад оформлення в додатку 1.3.

1.3.1. Набираючи код, робітник забув *m* останніх цифр, але пам'ятає що вони *n* і набрав їх навмання. Усі цифри різні. Знайти ймовірність того, що він набрав їх правильно з першого разу. Значення *m* та *n* приведено в табл.1.6.

Таблиця 1.6 Вхідні дані до завдання 1.3.1 та 1.3.2 відповідно до номеру варіанту

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
m	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	5	4
n	без 0 і 3	парні і 0	Не-парні	різні	Не-парні	без 1 і 3	парні	парні і 0	різні	без 0, 1 і 3	без 2 і 7	різні
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
m	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5	3	4
n	без 1 і 3	без 1	парні	різні	парні і 0	без 1	без 0, 1 і 3	Не-парні	парн і і 0	без 0	без 5	різні

1.3.2. У ящику 20+№В деталей, помічених номерами 101, 102, …, 130. Навмання достали *m* карт. Знайти ймовірність того, що карти мають задані номера. Значення *m* приведено в таблиці 1.6.

1.3.3. У коробці *n* деталей, помічених номерами 1, 2, … n. Навмання по одній витягають всі деталі. Знайти ймовірність того, що деталі з'являться в зростаючому порядку. Де *n*=№В+10.

1.3.4. Студент займається спортом, причому n1 днів плаванням, n2 днів легкою атлетикою та має n3 днів вихідних. Складіть студенту графік, щоб заняття не повторювалися.

Таблиця 1.7 Вхідні дані до завдання 1.3.4 відповідно до номеру варіанту

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
n1	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	1	3
n2	4	2	1	2	2	4	2	1	4	3	3	2
n3	2	3	4	1	4	1	2	2	2	2	3	2
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
n1	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	0	5
n2	3	2	2	3	1	3	3	2	1	0	3	1
n3	1	1	4	2	3	0	3	3	3	3	4	1

1.3.5. Шифр складається з $m1$ цифр та $m2$ букв. Скільки існує варіантів даного шифру, якщо спочатку йдуть цифри, а потім букви?

Вхідні дані: для ***парного номеру*** варіанту – цифри від 0 до 9, букви голосні; для ***непарного*** – цифри непарні, букви приголосні; значення $m1$ та $m2$ наведено в табл.1.8.

Таблиця 1.8 Вхідні дані до завдання 1.3.5
відповідно до номеру варіанту

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
m1	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	2	4
m 2	2	3	4	1	4	1	2	2	2	2	3	2
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
m 1	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5	4	5
m 2	3	2	2	3	1	3	3	2	1	0	2	2

1.3.6. У партії n деталей, з яких m стандартних. Знайти ймовірність того, що серед навмання витягнутих k може виявитись:

А) хоча б $m1$ стандартна; Б) $m2$ стандартні; В) $m3$ стандартні;

m1 – для ***парного номеру*** варіанту 2, для ***непарного*** – 1; ***m2*** - для парного номера варіанту 3, для непарного – 2; ***m3*** = k

Таблиця 1.9 Вхідні дані до завдання 1.3.6
відповідно до номеру варіанту

№В	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
m	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	7	5
n	8	10	12	12	12	7	9	11	13	13	13	11
k	3	4	5	4	5	3	4	5	4	5	3	3
№В	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
m	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	6	7
n	9	9	10	10	12	7	8	9	14	14	11	10
k	3	3	4	4	5	3	3	3	4	5	3	3

1.3. Вимоги до оформлення звіту

1. Звіт має бути представлений в електронному вигляді.

2. Назва електронного файлу **КП1_Прізвище студента_№варіанту.**

3. Файл повинен містити наступні елементи:

Дано: *вхідні дані* – позначити жовтим;

Знайти: *невідоме з вказаною умовою* – позначити червоним;

Розв'язок:

Позначити задані умови через події. Зробити опис кожної дії – позначити зеленим.

Відповідь: - позначити червоним.

4. При заміні тільки вхідних даних (виділено жовтим) повинен змінюватись вихідний результат.

5. Оформлення завдань згідно Додатків 1.1-1.3.

6. Висновки по роботі.

Якщо звіт не відповідає вимогам, робота не зараховується!

1.4. Контрольні запитання

1. Факторіал та його властивості. Як відрізняються значення, отримані за формулою Муавра-Стерлінга?

2. Чим перестановки без повторень відрізняються від перестановок з повтореннями? Наведіть приклад.

3. Чим розміщення з повтореннями відрізняються від розміщень без повторень? Наведіть приклад.

4. Чим поєднання без повторень відрізняються від поєднань з повтореннями?

5. У яких випадках використовують формулу перестановок?

6. У яких випадках використовують формулу розміщень? Наведіть приклад.

7. У яких випадках використовують формулу поєднань? Наведіть приклад.